SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECIDO

(Mass Spring Damper System)

Daniela Cristina Panciera [danielacpanciera@gmail.com]

Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC

RESUMO

Este trabalho foi feito como trabalho de conclusão da disciplina Física Computacional, ministrada pelo professor Reinaldo Haas na Universidade Federal de Santa Catarina.

O seguinte artigo se refere ao sistema de massa-mola-amortecido, uma curva descrita por meio de uma função matemática relacionada com aproximação direta por equações diferenciais. Procurou-se primeiro introduzir a história do desenvolvimento, ao mesmo tempo em que exemplifica-se algebricamente sua dedução, e ao final complementou-se a solução com o auxílio do software Matlab para fim de demonstração didática.

Palavras-chave: sistema massa-mola-amortecido, derivadas parciais, MATLAB.

ABSTRACT

This work was done as a final project of Computational Physics course, ministred by Professor Reinaldo Haas at the Federal University of Santa Catarina.

The following article refers to the mass-spring-cushioned system, a curve described by a mathematical function related to direct approach by differential equations. First sought to introduce the history of development, while exemplifying up algebraically your deductible, and at the end the solution was supplemented with the help of Matlab software to teaching demonstration.

Keywords*: mass-spring-cushioned system, differential equations, MATLAB.*

1 – INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são usadas para construir modelos matemáticos de fenómenos físicos como por exemplo, na dinâmica de fluidos. Deste modo, o estudo de equações diferenciais é um campo extenso na matemática pura e na matemática aplicada.

A resolução dos problemas da Física Matemática e também da Mecânica Teórica e do Contínuo usualmente levam a equações diferenciais parciais e mais raramente a equações diferenciais ordinárias. Na utilização dos métodos diretos nos deparamos com o fato de que em muitos casos é possível substituir o problema de integrar uma equação diferencial por um problema equivalente de encontrar a função que faz com que uma certa integral tenha o mínimo valor possível.

2 – MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Uma vez conhecida a forma como a aceleração de uma partícula varia com o tempo, podemos usar a segunda lei de Newton para descobrir qual é a força que deve agir sobre a partícula para que ela adquira essa aceleração. Combinando a segunda lei de Newton com a equação $a(t) = -\omega^2 x(t)$ (aceleração da partícula) encontramos, para o movimento harmônico simples, a seguinte relação:

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \qquad (1)$$

Este resultado, uma força restauradora proporcional ao deslocamento, já foi encontrado em outro contexto: é a expressão matemática da lei de Hooke,

$$F = -kx, \qquad (2)$$

Para uma mola, sendo que neste caso a constante elástica é dada por

$$k = m\omega^2. \qquad (3)$$

O movimento harmônico simples é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força proporcional ao deslocamento da partícula e de sinal oposto.

O sistema bloco-mola da Fig 1. constitui um oscilador harmônico simples linear, onde o termo “linear” indica que F é proporcional a x e não a alguma outra potência de x. A frequência angular ω do movimento harmônico simples do bloco está relacionada à constante elástica k e à massa m do bloco pela Eq.(3), que nos dá

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(frequência angular).} \qquad (4)$$

Combinando as equações $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (frequência angular) e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (frequência angular) podemos escrever, para o período do oscilador linear da Fig 1,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(período).} \qquad (5)$$

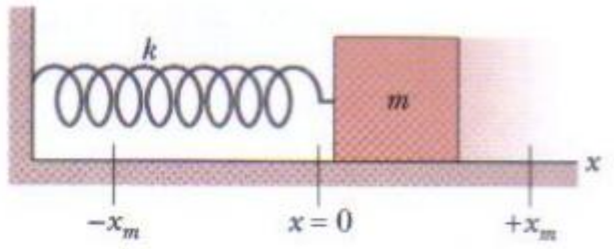

Figura 2.

De acordo com as equações *(4)* e *(5)*, uma grande frequência angular (e, portanto, um pequeno período) está associada a uma mola rígida (*k* elevado) e a um bloco leve (*m* pequeno).

Todo sistema oscilatório, seja ele um trampolim ou uma corda de violino, possui uma certa "elasticidade" e uma certa "inércia" e, portanto, se parece com um oscilador linear. No oscilador da Fig 1. Esses elementos estão concentrados em partes diferentes do sistema: a elasticidade está inteiramente na mola, cuja massa desprezamos, e a inércia está inteiramente no bloco, cuja elasticidade é ignorada.

2 – MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES AMORTECIDO

Um pêndulo oscila apenas por um curto tempo debaixo d'água, pois a água exerce sobre o pêndulo a uma força de arrasto que elimina rapidamente o movimento. Um pêndulo oscilando no ar funciona melhor, mas ainda assim o movimento ocorre durante um tempo limitado, porque o ar exerce uma força de arrasto sobre o pêndulo (e uma força de atrito age no ponto de sustentação), roubando energia do movimento do pêndulo.

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa dizemos que o oscilador e seu movimento são amortecidos**.** Podemos ver um exemplo idealizado na Fig.3, na qual um bloco de massa *m* oscila verticalmente preso a uma mola de constante elástica *k*. Uma barra liga o bloco a uma palheta imersa em um líquido. Suponha que a barra e a palheta têm massa desprezível. Quando a palheta se move para cima e para baixo o líquido exerce uma força de arrasto sobre ela e, portanto, sobre todo o sistema. A energia mecânica do sistema bloco-mola diminui com o tempo, à medida que a energia é transferida para energia térmica do líquido e da

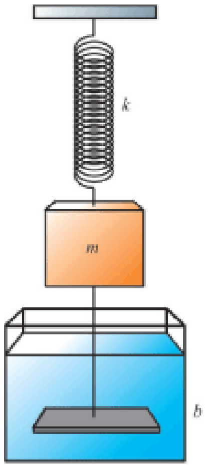

Figura 3. Oscilador massa-mola amortecido ideal. A pá imersa no líquido exerce uma força de amortecimento no sistema a cada ciclo de oscilação.

palheta.

Vamos supor que o líquido exerce uma força de amortecimento F_a proporcional à velocidade da palheta e do bloco. Nesse caso, para componentes ao longo do eixo x na Fig.3 temos:

$$F_a = -bv,$$

Onde b é uma constante de amortecimento que depende das características tanto da pá como do líquido e tem unidades de quilograma por segundo no SI. O sinal negativo indica que $_a$ se opõe ao movimento.

A força exercida pela mola sobre o bloco é $F_m = -kx$. Vamos supor que a força gravitacional a que o bloco está submetido seja desprezível em comparação com F_a e F_m. Nesse caso, podemos escrever a segunda lei de Newton para componentes ao longo do eixo x ($F_{res,x} = ma_x$) como

$$-bv-kx = ma. \qquad (a)$$

Substituindo por dx/dt, a por d^2x/dt^2 e reagrupando os termos, obtemos a equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad (b)$$

A solução desta equação é

$$(t) = {}_m e^{-bt/2m} cos(\omega' t + \Phi) \qquad (c)$$

onde $_m$ é a amplitude e ω' é a freqüência angular do oscilador amortecido. Esta freqüência angular é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \qquad (d)$$

Se b = 0 (ausência de amortecimento), a Eq.*(d)* se reduz à equação $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ para a frequência angular de um oscilador não-amortecido, e a E.q*(c)* se reduz à equação T = 2π $\sqrt{\frac{k}{m}}$ para o deslocamento de um oscilador não-amortecido. Se a constante de amortecimento é pequena mas diferente de zero, de modo que b < $\sqrt{km}$ e então $\omega' = \omega$.

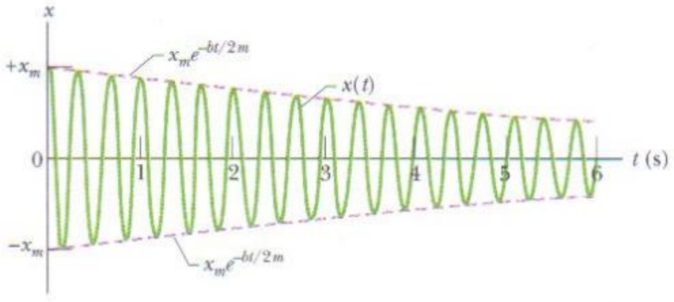

Figura 4. A função deslocamento $x(t)$ do oscilador amortecido da Fig. 15-15, para os valores do Exemplo 15-7. A amplitude, que é dada por $x_m e^{-bt/2m}$, diminui exponencialmente com o tempo.

Podemos considerar a Eq.*(c)* como uma função cosseno cuja amplitude, dada por $x_m e^{-bt/2m}$, diminui gradualmente com o tempo, como mostra a Figura 4.

3 – MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES FORÇADO

Movimento harmônico forçado é uma oscilação de um sistema que acontece em função de uma força externa alternada com uma freqüência angular ω_{ext}. Neste caso, embora a freqüência angular de oscilação própria ω do oscilador esteja bem definida pelos parâmetros da instrumentação do sistema oscilará de acordo com a força externa aplicada, assim como com a amplitude definida pela força externa. Se ocorrer uma coincidência destas freqüências, isto é, $\omega = \omega_{ext}$, teremos um fenômeno conhecido como ressonância.

A um sistema que executa oscilações forçadas podemos associar duas frequências angulares): uma delas está de acordo com a frequência angular das oscilações livres do sistema, ou seja, é a frequência natural(ω) do sistema adquirido a partir de uma perturbação curta; e a outra está associada com a frequência angular da força externa(ω_{ext}), contínua e periódica, que produz a oscilação forçada. Perceba que em um momento falamos sobre frequência angular natural e em outro apenas sobre frequência natural. Isso se deve pelo fato de que as duas grandezas estão relacionadas por uma constante 2π, descritas a seguir:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

A amplitude do sistema de oscilação forçada ideal é máxima quando a frequência angular da força externa é igual à frequência angular natural do sistema. Essa situação caracteriza um caso de ressonância, na qual o sistema passa a oscilar com um amplitude crescente. Para um sistema que sofre oscilação forçada com amortecimento (caso real), percebemos que o menor amortecimento está associado a um pico de ressonância mais alto.

4 - CÓDIGOS PARA IMPLEMENTAÇÃO NO SOFTWARE MATLAB

```
function  MassaMolaAmortecidoForcado(Massa, Amortecimento, Rigidez,
Posicao, Velocidade, Amplitude, w0)

 if nargin < 1
   Massa = 20;
   Amortecimento = 5;
   Rigidez = 50;
   Posicao = 0;
   Velocidade = 1;
   Amplitude = 5;
   w0 = ((Rigidez/Massa).^1/2);
 end

tspan = [0; 50];
u0 = [Posicao; Velocidade];

[t,u] = ode45(@f,tspan,u0);

figure;
plot(t,u(:,1),'r*--', t, u(:,2), 'b*--', 'MarkerSize', 2, 'LineWidth',
0.5 );
title(['m = ' num2str(Massa),'; b = ' num2str(Amortecimento), '; k = '
num2str(Rigidez), ...
    '; x0 = ' num2str(Posicao), '; v = ' num2str(Velocidade)]);

xlabel('tempo');
ylabel('Deslocamento , Velocidade, Aceleracao'); grid on;
axis tight;
axis([tspan(1) tspan(end) -5, 5]);
hold on;
Aceleracao=-(Amortecimento/Massa)*u(:,2)-(Rigidez/Massa)*u(:,1);
plot(t,Aceleracao,'g*--', 'MarkerSize', 2, 'LineWidth', 0.5 );
legend('Deslocamento', 'Velocidade', 'Aceleracao');
hold off;

  function dudt = f(t,u)
      dudt = [    u(2);       - (Amortecimento/Massa)*u(2) -
(Rigidez/Massa)*u(1) + (Amplitude/Massa)*cos(w0*t) ];
  end

end
```

4 - REFERÊNCIAS

1. Halliday, David. Fundamentos dde física, volume 2 : gravitação, ondas e termodinâmica / Halliday, Resnick, Jearl Walker : tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. – Rio de Janeiro : LTC, 2009. 4v.

2. http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html (acessado em 27/11/13).
3. http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37449-mass-spring-oscillator-animated-gui (acessado em 27/11/13).
4. http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31246-spring-mass-damper-system-behavior-analysis (acessado em 27/11/13).
5. http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28085-gui-to-plot-response-of-a-spring-mass-damper-system (acessado em 27/11/13).